

I - Modélisation électrique de l'étude thermique d'un bâtiment

1) On reconnaît la loi d'Ohm prise en convention récepteur :

$$R_{th} = \frac{T_e - T_i}{\phi_{th}} = \frac{T_e - T_i}{\phi_{e \rightarrow i}} \quad \leftrightarrow \quad R = \frac{V_2 - V_1}{i_{2 \rightarrow 1}}$$

2) En régime permanent, on remplace les capacités par des interrupteurs ouverts. Un diviseur de tension donne alors :

$$u_{2,\infty} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{1,\infty}$$

3) Les deux dipôles sont en dérivation :

$$\underline{Z}_2 = \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2 \right)^{-1} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

4) Les deux dipôles sont en série :

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \underline{Z}_2 = \frac{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

5) On combine $\underline{Z}_1$ et le condensateur C_1 qui sont en dérivation. Ce nouveau dipôle est traversé par le courant i et possède la tension u_1 à ses bornes.

$$\underline{Z}_{eq} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + j\omega C_1 \right)^{-1} = \frac{u_1}{i}$$

6) En simplifiant par $e^{j\omega t}$ et avec ce qu'il précède, on obtient :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{1 + j\omega \underline{Z}_1 C_1} I_0 = \frac{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_2}{(1 + j\omega \underline{Z}_1 C_1)(1 + j\omega R_2 C_2)} I_0$$

On développe le dénominateur

$$\underline{U}_1 = \frac{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_2}{1 + j\omega [(R_1 + R_2) C_1 + R_2 C_2] - R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2} I_0$$

7) Lorsque $\omega = 0$, on obtient :

$$U_{10} = (R_1 + R_2) I_0$$

8) Regardons les limites BF et HF :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_2}{1 + j\omega [(R_1 + R_2) C_1 + R_2 C_2] - R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{H}(\omega = 0) = 1 \\ \underline{H}(\omega = \infty) = 0 \end{cases}$$

Le filtre laisse passer les BF mais coupe les HF. Il s'agit donc d'un passe-bas.

9) On a :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\omega \frac{\alpha RC}{4}}{1 + j\omega RC \left[1 + \frac{\alpha}{2} \right] - \frac{\alpha}{4} (\omega RC)^2}$$

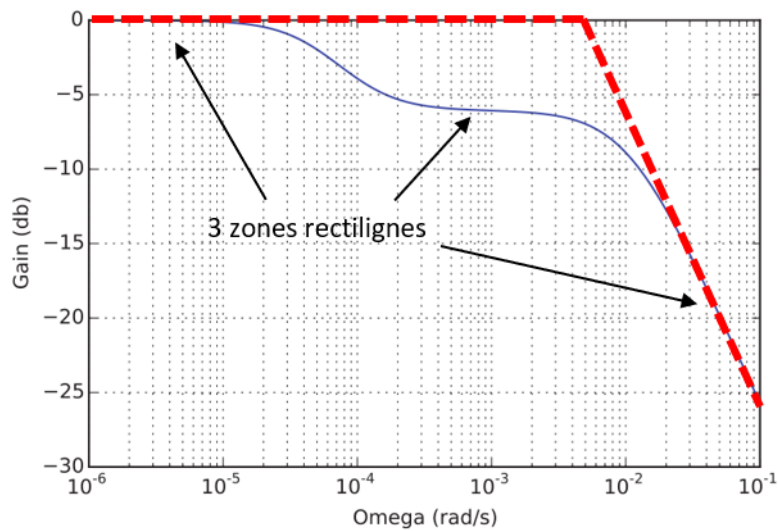
10) On a :

$$\underline{H}(\omega \rightarrow 0) = 1 \quad \text{et} \quad \underline{H}(\omega \rightarrow \infty) = \frac{1}{j\omega RC}$$

11) On en déduit les gains en décibel :

$$G_{dB}(\omega \rightarrow 0) = 0 \quad \text{et} \quad G_{dB}(\omega \rightarrow \infty) = -20 \log(\omega RC)$$

Les deux asymptotes se croisent en $\omega = 1/RC$. On en déduit :



12) On identifie 3 zones rectilignes. Le graphe montre bien un passe-bas avec une pente de -20 dB/dec en HF.

13) On a :

$$\underline{H}_i(\omega \rightarrow 0) = 1 \quad \text{et} \quad \underline{H}_i(\omega \rightarrow \infty) = \frac{j\omega}{\omega_i}$$

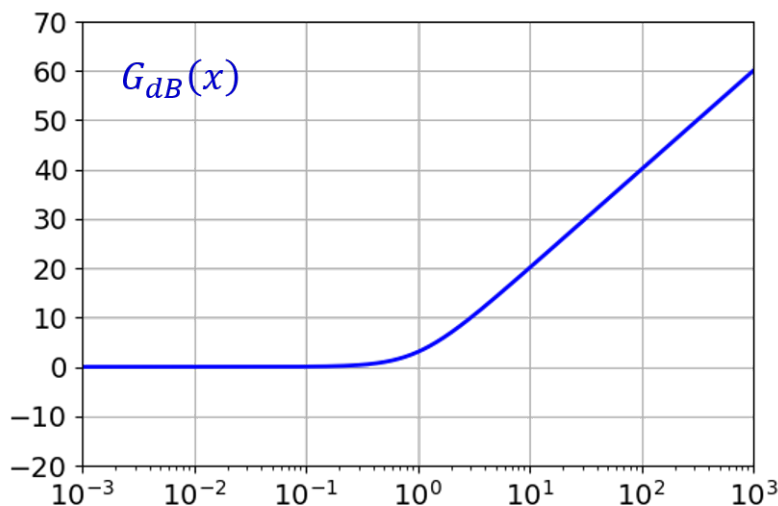
On en déduit les gains en décibel :

$$G_{dB,i}(\omega \rightarrow 0) = 0 \quad \text{et} \quad G_{dB,i}(\omega \rightarrow \infty) = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)$$

Ces deux asymptotes se croisent en $\omega = \omega_i$. C'est en ce point que :

$$\underline{H}_i(\omega_i) = 1 + j \quad \Rightarrow \quad G_{dB,i}(\omega_i) = 20 \log(\sqrt{3}) = 3 \text{ dB}$$

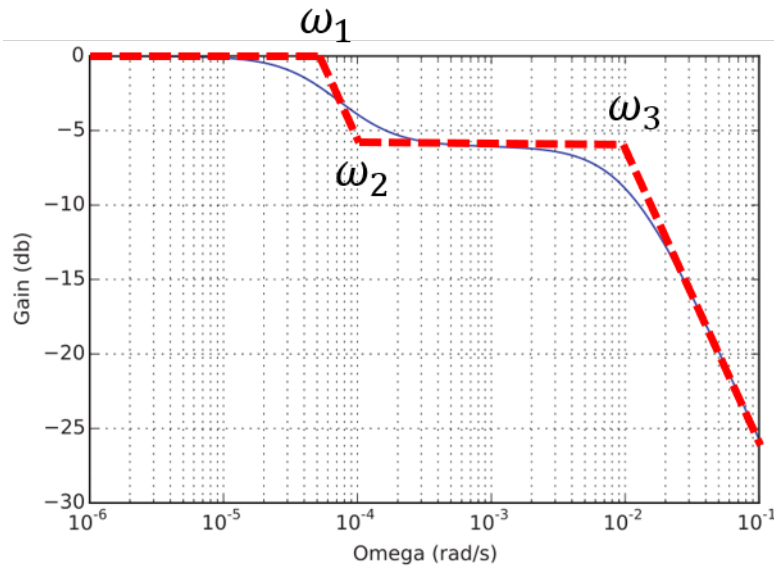
Diagramme de Bode :



14) Le passage au gain en décibel donne :

$$G_{dB} = G_{dB,2} - G_{dB,1} - G_{dB,3}$$

15) On en déduit le diagramme asymptotique complet :



16) Une pulsation de coupure est définie par :

$$G_{dB}(\omega_c) = \max(G_{dB}) - 3 \text{ dB}$$

On constate graphiquement que :

$$\omega_c = \min(\omega_i) = \omega_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Chaque pulsation propre ω_i correspond à l'inverse d'un temps caractéristique $\tau_i = 1/\omega_i$. Le temps caractéristique du régime transitoire est égal au plus grand des temps caractéristiques.

$$\tau = \max(\tau_i) = \frac{1}{\omega_1} = 20 \cdot 10^3 \text{ s} = 5\text{h}30$$

----- Fin de la partie I -----

II - Étude d'un Filtre de Wien

17) En BF, $u_s = 0$ la tension aux bornes d'un fil. En HF, $u_s = 0$ la tension aux bornes d'une résistance traversée par un courant nul. Le filtre coupe les basses et hautes fréquences, il s'agit d'un passe-bande.

18) On combine les dipôles R et C en série (impédance notée $\underline{Z}_1$) et les dipôles R et C en dérivation (impédance notée $\underline{Z}_2$).

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1 + j\omega RC}{j\omega C} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right)^{-1} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Avec un pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2^{-1}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right)} = \frac{1}{3 + j\omega RC + \frac{1}{j\omega RC}}$$

Sous forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3} \left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC} \right)} \Rightarrow H_0 = Q = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

19) Par définition :

$$\begin{cases} G_{dB}(x) = 20 \log \left(\frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}} \right) = 20 \log(H_0) - 10 \log \left(1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right) \\ \phi(x) = \arg \left(\frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \right) = - \arg \left(1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) = - \arctan \left(Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) \end{cases}$$

20) Pour maximiser le gain il faut minimiser le terme : $1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2$. Puisque ce terme est toujours supérieur à 1, et qu'il vaut 1 si $x = 1$, alors la valeur $x = 1$ maximise le gain. Ainsi,

$$H_{max} = H(x = 1) = H_0 \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(x = 1) = 20 \log(H_0) \simeq -9,5 \\ \phi(x = 1) = 0 \end{cases}$$

21) Par définition des pulsations de coupure, on cherche x_c tel que :

$$\begin{aligned} H(x_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} &\Rightarrow \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right)^2 = 2 \\ &\Rightarrow Q \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right) = \pm 1 \Rightarrow x_c^2 \mp \frac{x_c}{Q} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Les solutions sont :

$$x_{c,\pm\pm} = \frac{1}{2} \left[\pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right]$$

On garde uniquement les deux solutions positives :

$$x_{c,\pm} = \frac{1}{2} \left[\pm \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right]$$

On en déduit la largeur de la bande passante :

$$\Delta x = x_{c,+} - x_{c,-} = \frac{1}{Q}$$

22) Les asymptotes BF et HF valent :

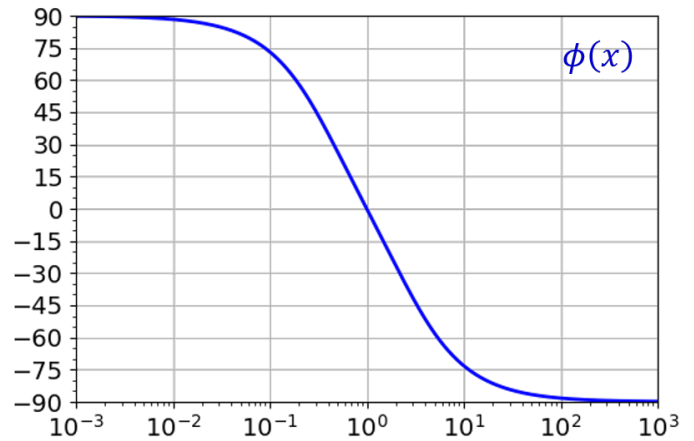
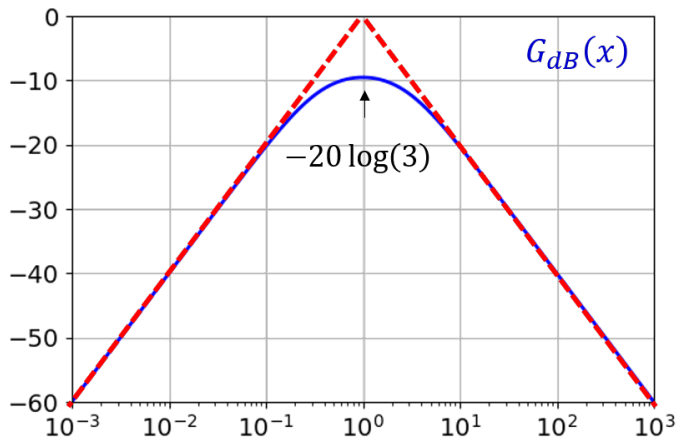
$$G_{dB}(BF) = \underbrace{20 \log \left(\frac{H_0}{Q} \right)}_{=0} + 20 \frac{\log}{x} \quad \text{et} \quad G_{dB}(HF) = \underbrace{20 \log \left(\frac{H_0}{Q} \right)}_{=0} - 20 \frac{\log}{x}$$

Les asymptotes se croisent en $x = 1$ et $G_{dB} = 0$. La courbe réelle en $x = 1$ vaut : $G_{dB}(x = 1) = 20 \log(H_0) \simeq -9,5$. On obtient le graphe ci-dessous.

23) Les asymptotes BF et HF valent :

$$\phi(BF) = +\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \phi(HF) = -\frac{\pi}{2}$$

La courbe réelle en $x = 1$ vaut : $\phi(x = 1) = 0$. On obtient le graphe ci-dessous.



24) En basses fréquences, on a un filtre dérivateur :

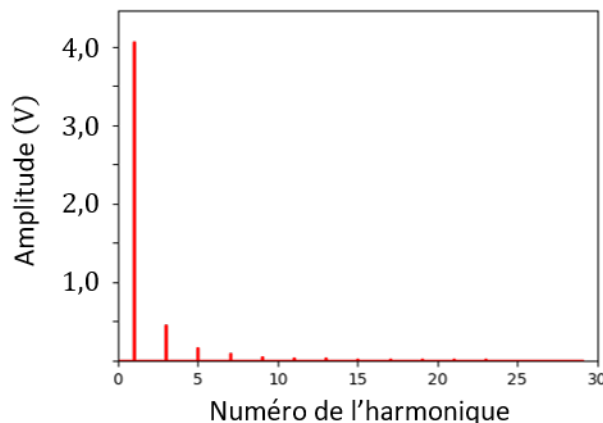
$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{-jQ/x} = j\omega \cdot \frac{H_0}{\omega_0 Q} \Rightarrow \boxed{s(t) = \frac{H_0}{\omega_0 Q} \frac{de(t)}{dt}}$$

En hautes fréquences, on a un filtre intégrateur :

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{jQx} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{\omega_0 H_0}{Q} \Rightarrow \boxed{s(t) = \frac{\omega_0 H_0}{Q} \int e(t) dt}$$

25) Un filtre permet de modifier le spectre d'un signal : fréquences, amplitudes et phases. Un filtre linéaire ne modifie pas les fréquences, seulement les amplitudes et les phases des fréquences du signal d'entrée.

26) On lit graphiquement que le signal triangle est d'amplitude $E_2 = 5$ V. On peut alors calculer : $\frac{8E_2}{\pi^2} = 4$ V. On a ensuite une décroissance en $1/n^2$ de l'amplitude des harmoniques.



27) Par le calcul :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 5000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Et on peut lire graphiquement :

$$2T_2 = 10 \times 200 \mu\text{s} \Rightarrow T_2 = 1,0 \text{ ms} \Rightarrow \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 6280 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = 1,256}$$

28) Puisque $x_2 > 1$, tous les harmoniques de u_{e2} sont dans la pente à -20 dB/dec du filtre. Ce dernier se comporte donc comme un intégrateur : le signal de sortie est (proportionnel à) une primitive du signal d'entrée. Il s'agit donc d'une suite de branches de parabole, croissante puis décroissante, d'amplitude plus faible que le signal d'entrée (le coefficient de proportionnalité est inférieur à 1 car $G_{dB} < 0$).

29) Par définition d'une fonction de transfert :

$$\underline{s} = \underline{e} \times \underline{H} \Rightarrow S_n = E_n \times H_n \text{ et } \underbrace{\phi_{s,n}}_{= \phi_{in}} = \underbrace{\phi_{e,n}}_{= 0} + \phi_{H,n}$$

Ainsi, pour le filtre d'étude :

$$S_n = -\frac{8E_2}{\pi^2 n^2} \times \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(nx_2 - \frac{1}{nx_2} \right)^2}} \quad \text{et} \quad \phi_n = -\arctan \left(Q \left(nx_2 - \frac{1}{nx_2} \right) \right)$$

30) On peut calculer les premiers termes :

$$|S_1| = 1,33 \text{ V} \quad |S_2| = 0,27 \text{ V} \quad |S_3| = 97 \text{ mV} \quad |S_4| = 44 \text{ mV}$$

On peut garder uniquement les deux premiers termes, car l'amplitude du troisième et des suivants est négligeable devant l'amplitude du fondamental. Ainsi,

$$u_2(t) \simeq \sum_{n \in \{1,3\}} S_n \cos(n\omega_2 t + \phi_n)$$

----- Fin de la partie II -----

III - Modélisation d'un filtre ADSL

31) Pour récupérer seulement les signaux téléphoniques, il faut un filtre passe-bas. Pour récupérer seulement les signaux informatiques, il faut un filtre passe-haut. Les deux bandes de fréquences étant peu espacées, la fréquence de coupure doit typiquement se trouver au milieu (en échelle log) de la bande libre :

$$f_c \simeq \sqrt{4 \times 25} = 10 \text{ kHz}$$

32) Ce filtre est un passe-haut car :

- en BF $u_s = 0$ la tension aux bornes d'un fil ;
- en HF $u_s = u_e$ la tension aux bornes de l'interrupteur ouvert.

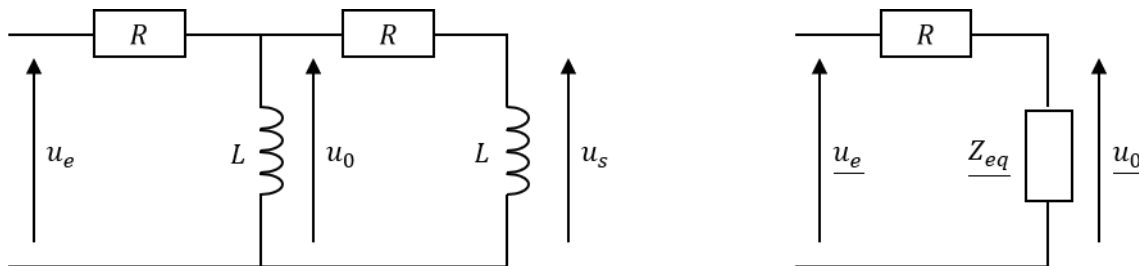
Il peut donc récupérer les signaux informatiques.

33) Étant donné que le circuit possède uniquement des R et des L , on peut intuitiver (afin de simplifier les calculs) par analogie avec le filtre RL que :

$$\omega_0 = \frac{R}{L} \Rightarrow x = \frac{\omega L}{R}$$

Nous verrons à l'issue du calcul s'il faut modifier cette définition.

On définit les notation ci-dessous.



Un pont diviseur de tension donne :

$$\underline{u_s} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \underline{u_0} = \frac{jx}{1 + jx} \underline{u_0}$$

L'impédance équivalente vaut :

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R + j\omega L} \right)^{-1} = R \left(\frac{1}{jx} + \frac{1}{1 + jx} \right)^{-1}$$

Un deuxième pont diviseur donne alors :

$$\underline{u_0} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{R + \underline{Z_{eq}}} \underline{u_e} = \frac{1}{1 + R \cdot \underline{Z_{eq}}^{-1}} \underline{u_e} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jx} + \frac{1}{1 + jx}} \underline{u_e}$$

En combinant les deux ponts diviseurs, on obtient :

$$\underline{u_s} = \frac{jx}{(1+jx)\left(1+\frac{1}{jx}+\frac{1}{1+jx}\right)} \underline{u_e} = \frac{(jx)^2}{1+3jx+(jx)^2} \underline{u_e} \Rightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{-x^2}{1+3jx-x^2}}$$

34) On peut réécrire la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2} - \frac{3j}{x}} \Rightarrow H(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \text{ avec : } g(x) = (1 - x^{-2})^2 + 9x^{-2}$$

Le gain $H(x)$ admet un maximum si $g(x)$ admet un minimum. Cherchons une pulsation qui annule $g'(x)$.

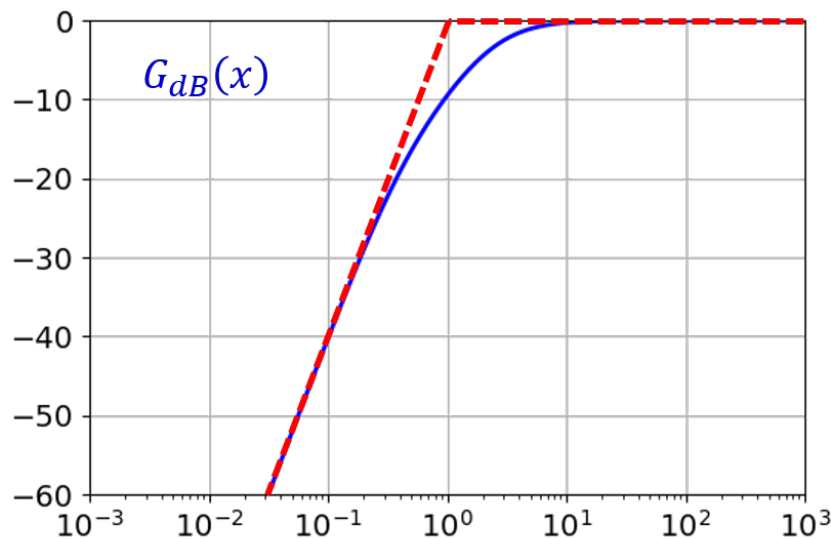
$$g'(x) = 0 = 4x^{-3}(1 - x^{-2}) - 18x^{-3} \Rightarrow 4(1 - x^{-2}) - 18 = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 = -3,5}$$

Puisque $x \in \mathbb{R}^+$, cette équation n'admet pas de solution. Il n'existe donc pas de résonance.

35) Il s'agit d'un filtre passe-haut d'ordre 2. Les asymptotes BF et HF valent :

$$G_{dB}(BF) = 20 \frac{\log}{x^2} = 40 \frac{\log}{x} \text{ et } G_{dB}(HF) = 20 \frac{\log}{x^2} = 0$$

Les asymptotes se croisent en $x = 1$ et $G_{dB} = 0$. La courbe réelle en $x = 1$ vaut : $G_{dB}(x = 1) = 20 \log\left(\frac{1}{3}\right) \simeq -9,5$ et ne présente pas de résonance. On obtient le graphe ci-dessous.



36) La fréquence de coupure vaut :

$$H(x_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow g(x_c) = 2 \Rightarrow (1 - X)^2 + 9X = 2 \text{ avec : } X = x_c^{-2} > 0$$

On en déduit :

$$X^2 + 7X - 1 = 0 \Rightarrow X = \frac{1}{2} \left[-7 + \sqrt{49 + 4} \right] \simeq 0,14 \Rightarrow \boxed{x_c = \frac{1}{\sqrt{X}} \simeq 2,67}$$

Donc d'après ce qu'il précède :

$$x_c = \frac{\omega_c L}{R} = \frac{2\pi f_c L}{R} \Rightarrow \boxed{L = \frac{x_c R}{2\pi f_c} = 4,25 \text{ mH}}$$

----- Fin de la partie III -----